Exercice 1: Bode 1° ordre

Equation différentielle

Question 1: Donner l'équation différentielle liant $T(t)$ et $T_0(t)$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{P(t)}{\rho V c} = -hA\frac{T(t) - T_o(t)}{\rho V c}$$

$$\frac{\rho V c}{hA}\frac{dT(t)}{dt} + T(t) - T_o(t) = 0$$

Question 2: Montrer que $T'_0(t)$ et $T'(t)$ vérifient la même équation différentielle que $T(t)$ et $T_0(t)$

$$T'(t) = T(t) - 273{,}15$$
$$T_0{}'(t) = T_0(t) - 273{,}15$$

$$\frac{dT'(t)}{dt} = \frac{d(T(t) - 273{,}15)}{dt} = \frac{dT(t)}{dt}$$

$$T'(t) - T_0{}'(t) = T(t) - 273{,}15 - (T_0(t) - 273{,}15) = T(t) - T_o(t)$$

$$\frac{\rho V c}{hA}\frac{dT'(t)}{dt} + T'(t) - T_0{}'(t) = 0$$

Question 3: Transformer cette équation dans le domaine de Laplace en supposant des conditions initiales non nulles – On note $T'(0^+) = T_i$

$$\frac{\rho V c}{hA}\frac{dT'(t)}{dt} + T'(t) = T_0{}'(t)$$

$$\frac{\rho V c}{hA}\left(pT'(p) - T'(0^+)\right) + T'(p) = T_0{}'(p)$$

$$\frac{\rho V c}{hA}(pT'(p) - T_i) + T'(p) = T_0{}'(p)$$

$$\left(\frac{\rho V c}{hA}p + 1\right)T'(t) - \frac{\rho V c}{hA}T_i = T_0{}'(p)$$

$$\left(\frac{\rho V c}{hA}p + 1\right)T'(t) = T_0{}'(p) + \frac{\rho V c}{hA}T_i$$

Question 4: Montrer que la température $\boldsymbol{T'(p)}$ se met sous la forme $\boldsymbol{T'(p) = H(p)T_0'(p) + H_i(p)T_i}$ où $\boldsymbol{H(p)}$ et $\boldsymbol{H_i(p)}$ seront données sous forme canonique en précisant leurs coefficients caractéristiques

$$T'(p) = \frac{1}{\frac{\rho V c}{hA}p + 1}T_0'(p) + \frac{\frac{\rho V c}{hA}}{\frac{\rho V c}{hA}p + 1}T_i$$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{\rho V c}{hA}p} = \frac{K}{1 + Tp}$$

$$H_i(p) = \frac{\frac{\rho V c}{hA}}{\frac{\rho V c}{hA}p + 1} = \frac{K_i}{1 + \tau_i p}$$

Attention : $\tau_i \neq T_i$!!!

$\begin{cases} K = 1 \\ T = K_i = \tau_i = \dfrac{\rho V c}{hA} \end{cases}$	
$T'(p) = \dfrac{K}{1 + Tp}T_0'(p) + \dfrac{K_i}{1 + Tp}T_i$	
$H(p) = \dfrac{K}{1 + Tp}$	$H_i(p) = \dfrac{\frac{\rho V c}{hA}}{\frac{\rho V c}{hA}p + 1} = \dfrac{T}{1 + Tp}$

Question 5: Discuter des unités des coefficients obtenus – On rappelle qu'une transformation de Laplace est une intégrale temporelle

En termes d'unités, la transformée de Laplace d'une fonction est une intégrale temporelle, elle multiplie dont par un temps.

$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$$

$$[F(p)] = [f(t)] * T$$

Lorsque les conditions initiales sont nulles, toutes les variables dans Laplace étant des variables multipliées par un temps, on fait abstraction de ce temps, on écrit sur les schéma blocs les unités associées aux variables temporelles, et dans les blocs, rien ne change comme le temps est de part et d'autre de chaque bloc.

Dans notre cas, les conditions initiales étant non nulles, il faut tenir compte de ce temps pour comprendre la relation obtenue. On a :

$$\mathcal{L}\big(f'(t)\big) = p\mathcal{L}\big(f(t)\big) - f(0^+)$$

$$\big[\mathcal{L}\big(f'(t)\big)\big] = [f'(t)] * T = \frac{[f(t)]}{T} * T = [f(t)]$$

$$\big[\mathcal{L}\big(f(t)\big)\big] = [f(t)] * T$$

$$\big[p\mathcal{L}\big(f(t)\big)\big] = \frac{T}{T}[f(t)] = [f(t)]$$

$$[f(0^+)] = [f(t)]$$

Dans notre étude, on a :

$$T'(p) = \frac{1}{Tp+1}{T_0}'(p) + \frac{T}{Tp+1}T_i$$

La question qui se pose est : est-ce normal que $K_i = \tau_i$ de mêmes dimensions. En effet, si on ne fait pas attention au fait que les variables de Laplace sont multipliées par un temps, on ne comprend pas. Mais en fait, c'est normal. Notons K l'unité du Kelvin et T l'unité du temps, on a :

$$[T'(p)] = [{T_0}'(p)] = K * T$$

$$\left[\frac{1}{Tp+1}\right] = \left[\frac{1}{\frac{T}{T}+1}\right] = 1$$

$$\left[\frac{T}{Tp+1}\right] = \left[\frac{T}{\frac{T}{T}+1}\right] = T$$

$$[T_i] = K$$

Soit :

$$K * T = K * T + K * T$$

Ce qui est correct.

Question 6: Exprimer la température $T_0'(p)$ de la planète dans le domaine de Laplace connaissant la fonction temporelle $T_0'(t)$

$$T_0'(t) = \left[T_m + T_0 \sin\left(\omega_p t\right)\right] u(t)$$

$$T_0'(p) = \frac{T_m}{p} + T_0 \frac{\omega_p}{p^2 + {\omega_p}^2}$$

Question 7: En déduire l'expression de $T'(p)$ en réponse à cette température imposée

$$T'(p) = \frac{K}{1+Tp}\frac{T_m}{p} + \frac{K}{1+Tp} T_0 \frac{\omega_p}{p^2 + {\omega_p}^2} + \frac{T}{1+Tp} T_i$$

Réponse temporelle

Question 8: Déterminer l'évolution de la température lorsque la sphère est déposée sur la planète

On suppose la température de la planète constante : $T_0{}'(t) = T_m u(t)$

$$T'(p) = \frac{1}{1+Tp}\frac{T_m}{p} + \frac{T}{1+Tp}T_i = \frac{T_m}{p} - \frac{T_m}{1+\frac{1}{T}p} + \frac{1}{p+\frac{1}{T}}T_i$$

$$T'(t) = \left[T_m\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + T_i e^{-\frac{t}{T}}\right]u(t)$$

$$T'(t) = \left[T_m\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + T_i e^{-\frac{t}{T}}\right]u(t)$$

$$T'(t) = \left[T_m + (T_i - T_m)e^{-\frac{t}{T}}\right]u(t)$$

Question 9: Déterminer l'expression du temps t_r permettant à la sphère de se rapprocher de 95% par rapport à la température finale

Attention, on parle d'évolution de T_i à T_m et non d'atteindre $0{,}95 T_m °C$

$$T'(t_r) - T'(0) = 0{,}95(T_m - T_i)$$

$$T_m + (T_i - T_m)e^{-\frac{t_r}{T}} - T_i = 0{,}95(T_m - T_i)$$

$$(T_m - T_i) + (T_i - T_m)e^{-\frac{t_r}{T}} = 0{,}95(T_m - T_i)$$

$$(T_i - T_m)e^{-\frac{t_r}{T}} = -0{,}05(T_m - T_i)$$

$$e^{-\frac{t_r}{T}} = -0{,}05 \Leftrightarrow -\frac{t_r}{T} = \ln(0{,}05) \Leftrightarrow t_r = -T\ln(0{,}05)$$

$$t_r \approx 3T$$

Question 10: Donner l'expression de la solution temporelle de la température de la sphère sur la planète en vous aidant des résultats du cours pour la réponse harmonique

Solution de l'équation sans second membre + solution en régime permanent + solution transitoire

$$T'(t) = \left[T_m + (T_i - T_m)e^{-\frac{t}{T}}\right]u(t) + |H(j\omega)|T_0 \sin\left(\omega_p t + \varphi\right)u(t) + f(t)$$

$$f(t) = \frac{T_0}{1 + T^2{\omega_p}^2}\omega_p T e^{-\frac{t}{T}}u(t)$$

Régime transitoire de la solution à l'entrée sinusoïdale (cf cours)

Question 11: Donner l'expression de $T_p{}'(t)$ en régime permanent

$$T_p{}'(t) = T_m + \left|H\left(j\omega_p\right)\right|T_0 \sin\left(\omega_p t + \varphi\right) = 50 + 50\left|H\left(j\omega_p\right)\right|\sin\left(\omega_p t + \varphi\right)$$

La température va osciller autour de T_m en régime permanent

Réponse harmonique en régime permanent de l'aluminium

Question 12: Déterminer les valeurs numériques des coefficients caractéristiques de $\boldsymbol{H(p)}$

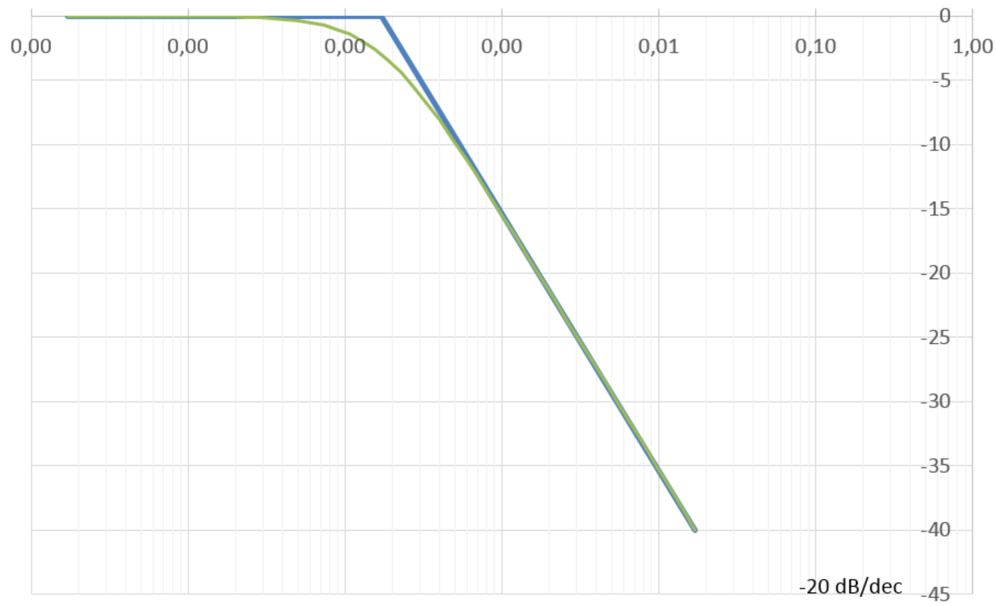
$$A = 4\pi {R_e}^2 = 4\pi * 0,15^2 = 0,282743\ m^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi\left({R_e}^3 - {R_i}^3\right) = \frac{4}{3}\pi(0,15^3 - 0,12^3) = 0,006899\ m^3$$
$$\begin{cases} K = 1 \\ T = \dfrac{\rho V c}{hA} = \dfrac{2700 * 0,006899 * 888}{10 * 0,282743} = 5850\ s = 97\ min \end{cases}$$

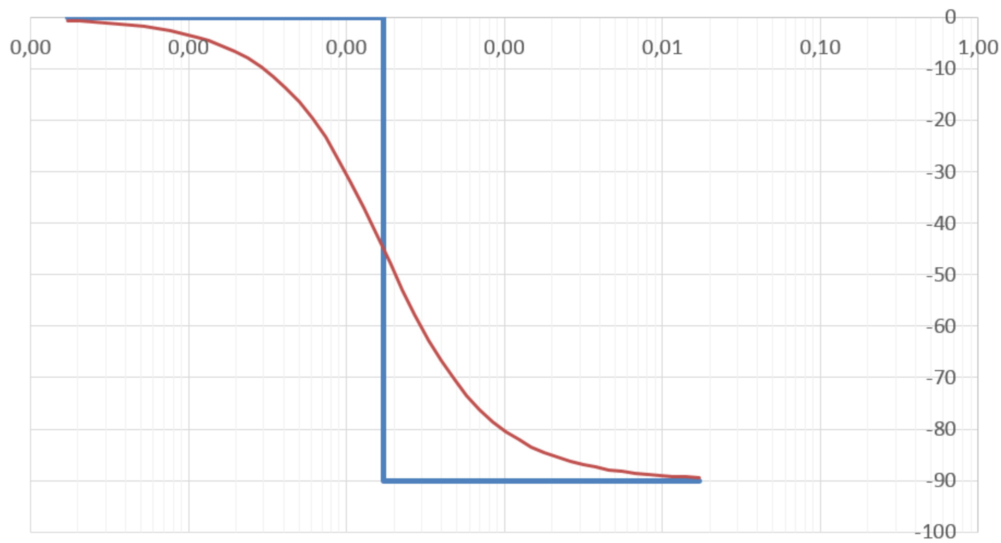
Question 13: Donner l'ordre de grandeur du temps de réponse $\boldsymbol{t_{r5\%}}$ pour ce matériau

$$t_r \approx 3T$$
$$t_r \approx 3 * 5850$$
$$t_r \approx 17550\ s \approx 4,87\ h$$

Question 14: Tracer sur le document réponse 1 le diagramme de Bode asymptotique (gain & phase) associé à l'évolution harmonique de la température de la sphère et ajouter l'allure de la courbe réelle

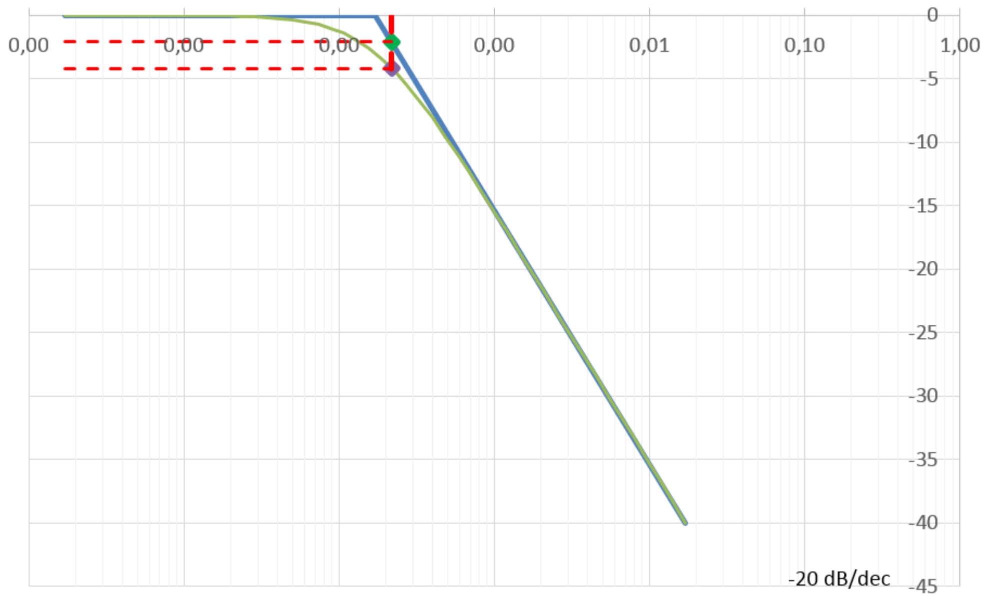
$$G_0 = 20\log 1 = 0$$
$$\omega_c = \frac{1}{T} = \frac{hA}{\rho V c} = 0{,}000171$$
$$\log \omega_c = -3{,}77$$

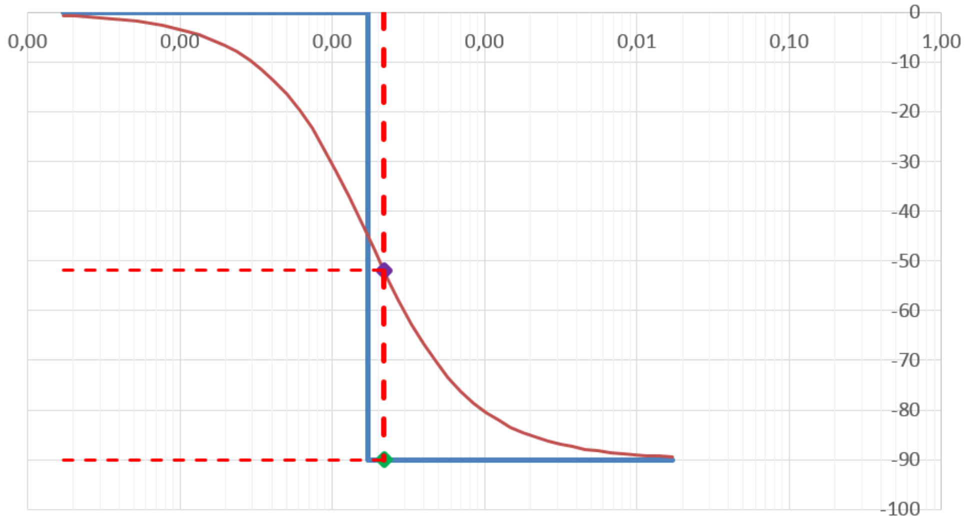




Question 15: En déduire une approximation de $T'(t)$ par lecture graphique du diagramme de Bode

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{8 * 3600} = \frac{2\pi}{28800} = 0{,}000218\, rd.s^{-1}$$
$$\log \omega_p = -3{,}66$$





$\lvert H \rvert$	G_{db}	s_0	φ
$10^{\frac{G}{20}} = 0{,}78$	$-2{,}11$	$39{,}21$	$-1{,}57\, rd$ $-90\,°$
$T'(t) = 50 + 39{,}21\, sin(0{,}000218t - 1{,}57)$			

Question 16: Déterminer cette réponse par le calcul

$$|H_{(j\omega)}| = \frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} \quad ; \quad G_{db} = 20log(|H_{(j\omega)}|)$$

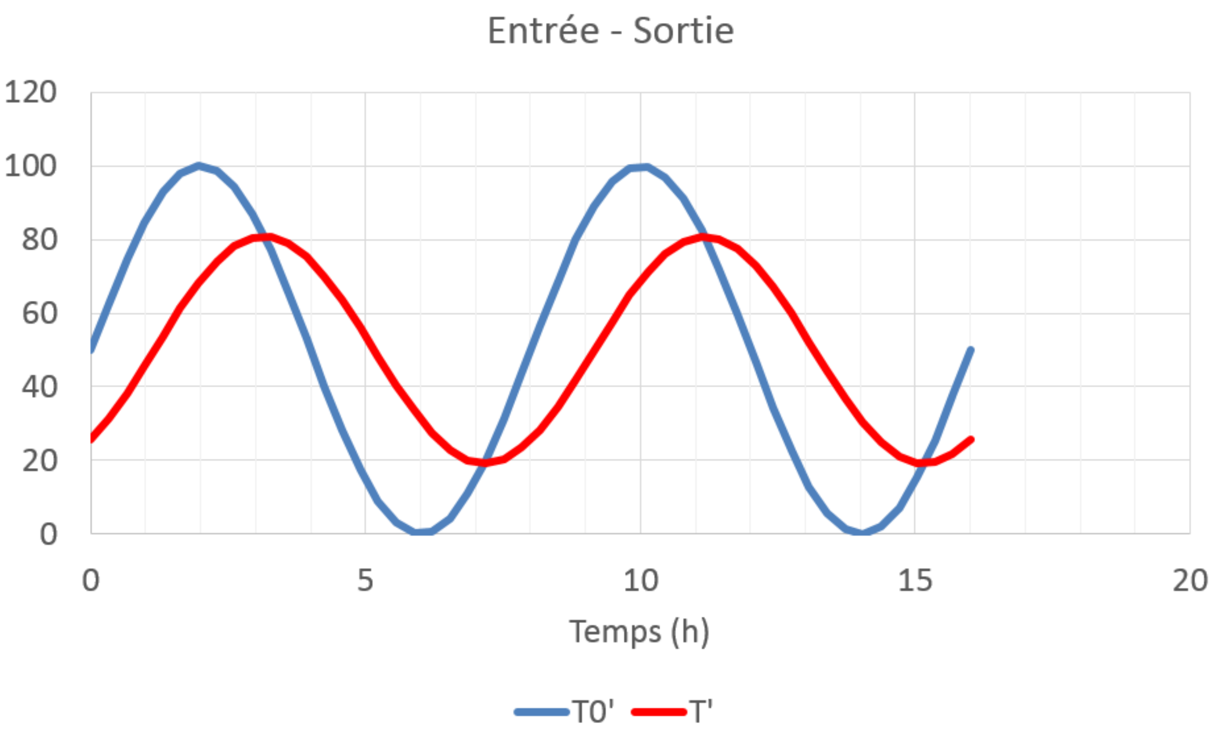
$$s_0 = |H|e_0$$

$$\varphi = -arg(1+j\omega T) = -\tan^{-1}\omega T$$

$\lvert H\rvert$	G_{db}	s_0	φ
$0{,}617$	$-4{,}19$	$30{,}85$	$-0{,}91\,rd$ $-51{,}90\,°$
$T'(t) = 50 + 30{,}85\,sin(0{,}000218t - 0{,}91)$			

Question 17: Tracer une approximation de l'entrée et de la sortie en calculant en particulier le déphasage temporel entre l'entrée et la sortie t_φ

$$t_\varphi = \frac{|\varphi|}{\omega_p} = \frac{0{,}91}{0{,}000218} = 4153\,s = 1{,}15 = 1h10$$



Respect du cahier des charges

Question 18: Sur une autre planète, à partir de quelle durée du jour $T_p{}'$ serait-il possible de respecter le cahier des charges avec de l'aluminium

Il faut résoudre :

$$|H^{lim}| = \frac{s_0}{e_0} = \frac{25}{50} \leq 0,5$$
$$G = 20 \log|H(j\omega')| = -6,02$$

Sachant que l'on va jouer dans cette question sur la pulsation du signal (et non sur les coefficients de la fonction de transfert, soit T car $K = 1$), on veut trouver la pulsation $\omega_p{}'$ du signal qui permet de respecter ce critère :

$$|H(j\omega_p{}')| < |H^{lim}|$$
$$\frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega_p{}'^2}} < |H^{lim}|$$
$$\omega_p{}' \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{K}{|H^{lim}|}\right)^2 - 1}{T^2}} = 0,000296$$
$$T_p{}' = \frac{2\pi}{\omega_p{}'} = \frac{2\pi}{0,000296} = 21221\ s = 5,9\ h$$
$$\omega_p{}' \geq 0,000296$$
$$T_p{}' \leq 5,9\ h$$

Il faut évidemment que la planète tourne plus vite afin de moins chauffer la sphère.

Question 19: En changeant le matériau, déterminer la constante de temps T^{lim} limite permettant de respecter le cahier des charges

Il faut résoudre :

$$|H^{lim}| = \frac{s_0}{e_0} = \frac{25}{50} \leq 0,5$$
$$G = 20 \log|H(j\omega')| = -6,02$$

Sachant que l'on va jouer dans cette question sur les coefficients de la fonction de transfert, soit T car $K = 1$), on veut trouver la constante de temps T^{lim} qui permet de respecter ce critère :

$$|H(j\omega_p)| < |H^{lim}|$$
$$\frac{K}{\sqrt{1 + T^2 \omega_p{}^2}} < |H^{lim}|$$

$$\omega_p \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{K}{|H^{lim}|}\right)^2 - 1}{T^2}} = 0{,}000296$$

$$T \geq \sqrt{\frac{\left(\frac{K}{|H^{lim}|}\right)^2 - 1}{{\omega_p}^2}}$$

$$T^{lim} = \sqrt{\frac{\left(\frac{K}{|H^{lim}|}\right)^2 - 1}{{\omega_p}^2}} = 7939\ s = 2{,}2\ h$$

Question 20: En déduire le critère sur le produit ρc permettant de répondre au critère du cahier des charges sur la planète étudiée

$$T \geq T^{lim}$$

$$\frac{\rho V c}{hA} \geq T^{lim}$$

$$\rho c \geq \frac{T^{lim} hA}{V} = \frac{7939 * 10 * 0{,}282743}{0{,}006899} = 3\ 253\ 744\ J.m^3.K^{-1}$$

Il faut évidemment que le facteur ρc soit plus grand afin d'avoir une inertie thermique plus importante.

Question 21: Choisir un matériau permettant de respecter le critère proposé

Matériau	ρ (kg/m^3)	c (J/kg/K)	ρc (J/m^3/K)
Aluminium	2700	888	2397600
Acier	7850	465	3650250
Titane	4500	522	2349000

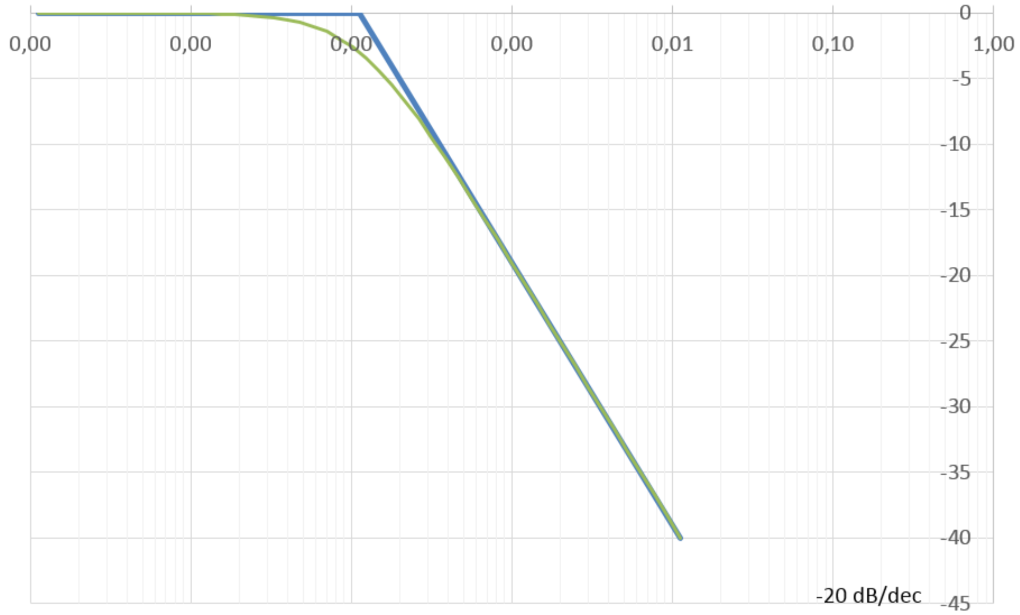
On choisit l'acier

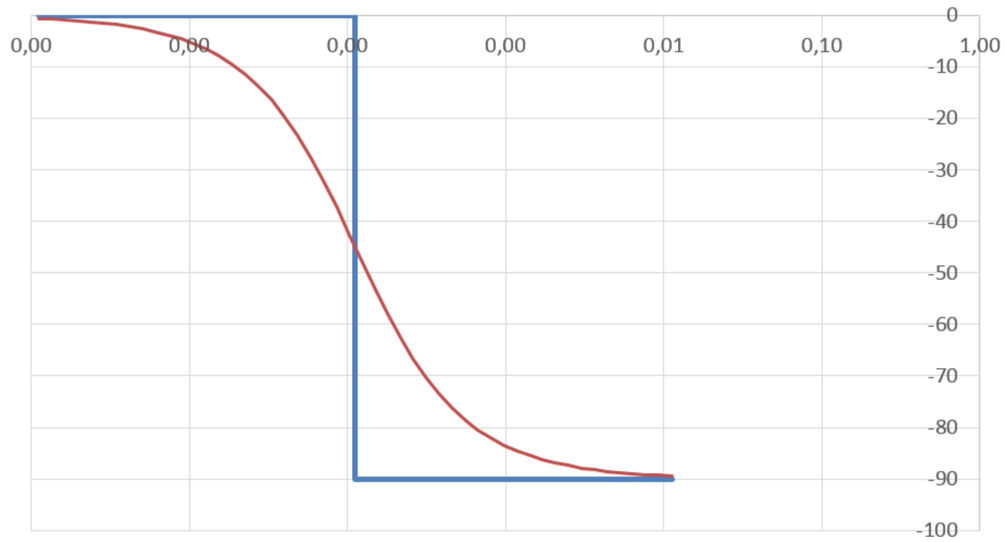
On a :

$$T^{acier} = \frac{\rho V c}{hA} = \frac{7850 * 0{,}006899 * 465}{10 * 0{,}282743} = 8906\ s = 2{,}47\ h\ min$$

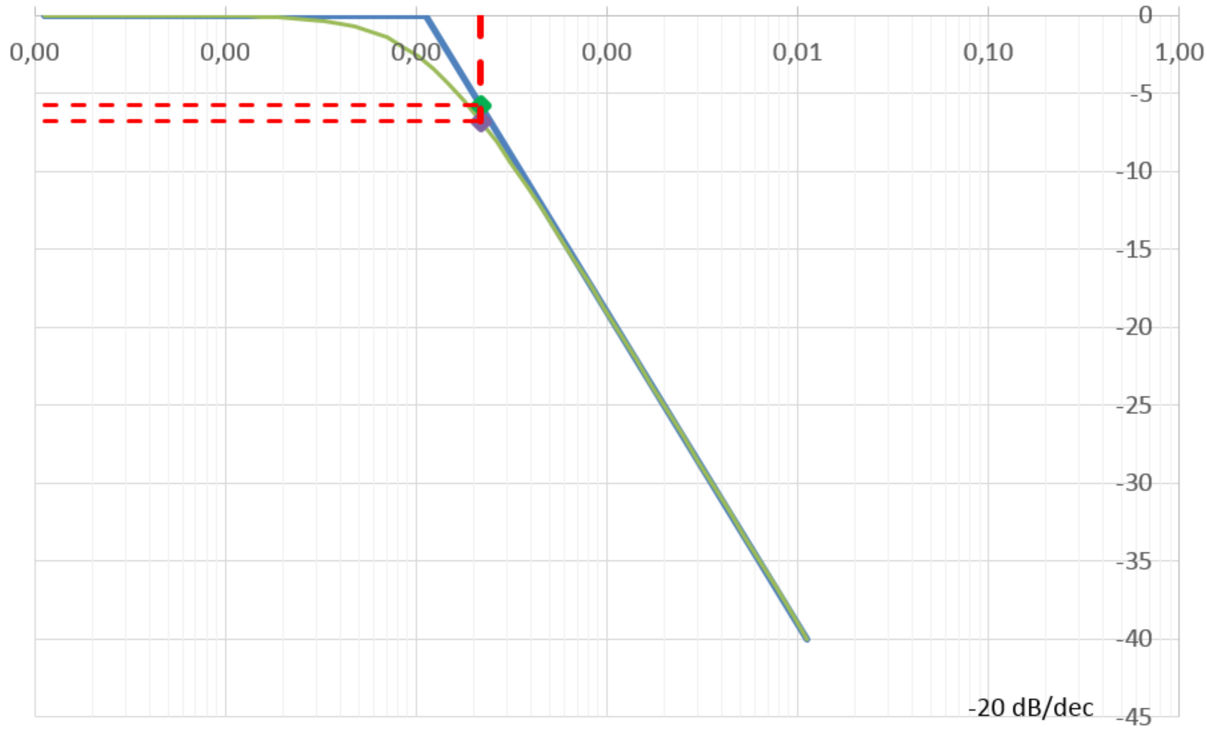
Question 22: Tracer sur le document réponse 2 le diagramme de Bode (gain & phase) avec ce nouveau matériau

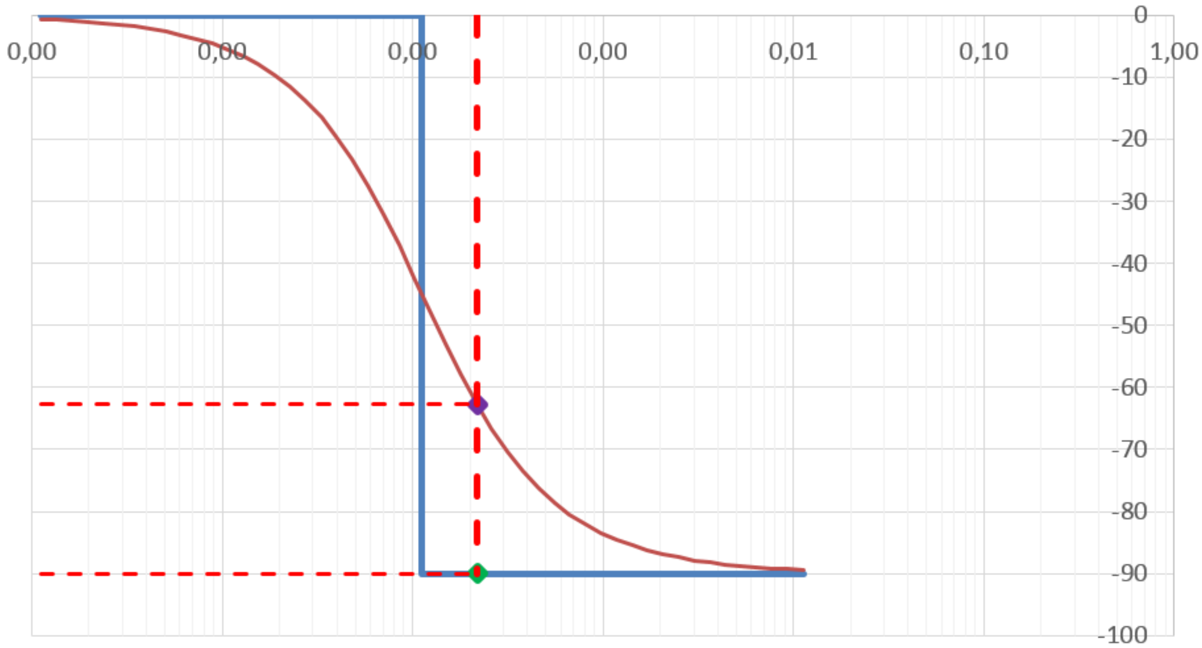
$$G_0 = 20 \log 1 = 0$$
$$\omega_c{}^{acier} = \frac{1}{T^{acier}} = 0{,}00011228$$
$$\log \omega_c{}^{acier} = -3{,}95$$





Question 23: En déduire l'expression approchée de la température par lecture graphique du diagramme de Bode dans ce cas



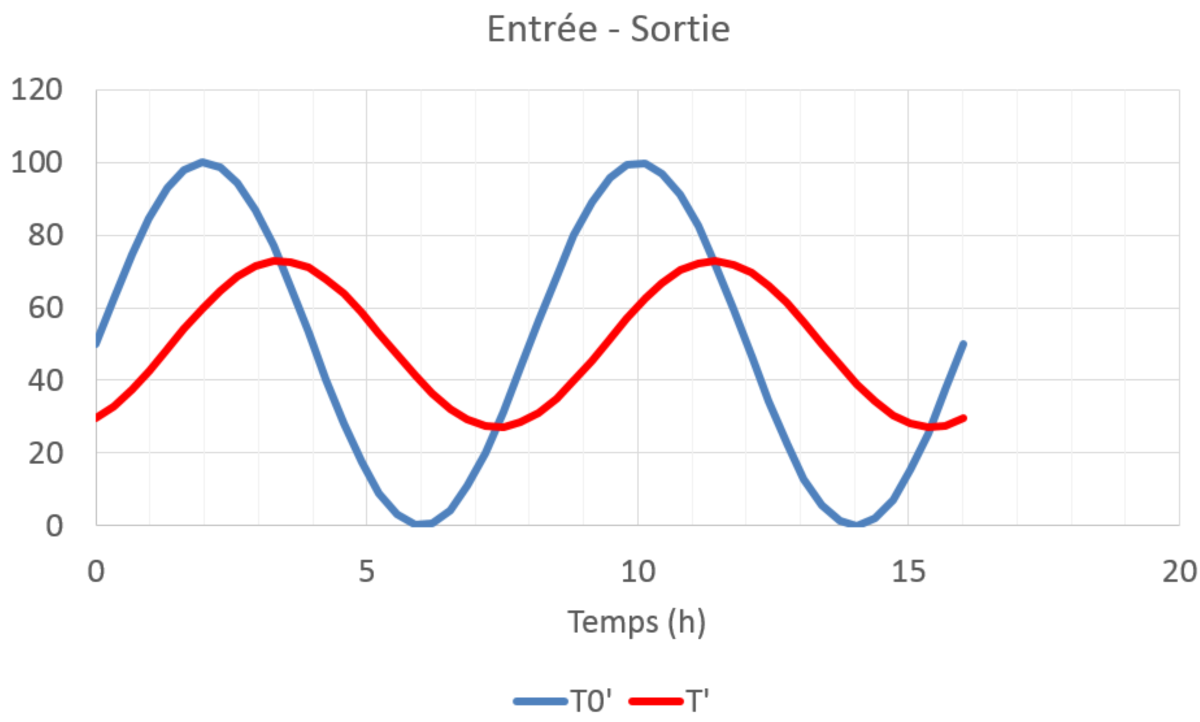


$\|H\|$	G_{db}	s_0	φ
0,458	$-6,78$	22,89	$-1,10\ rd$ $-62,75\ °$
$T'(t) = 50 + 22,89\ sin(0,000218t - 1,10)$			

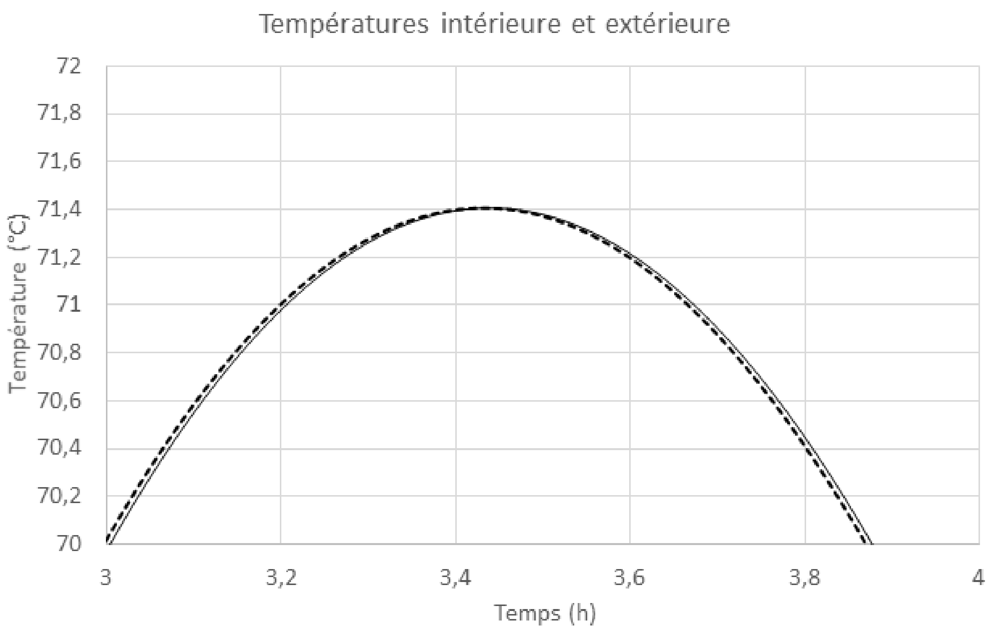
Evolution de la température avec le matériau choisi

Question 24: Tracer finalement une approximation de l'entrée et de la sortie en calculant en particulier le déphasage temporel entre l'entrée et la sortie t_φ

$$t_\varphi = \frac{|\varphi|}{\omega} = \frac{1,10}{0,000218} = 5021\ s = 1h39$$

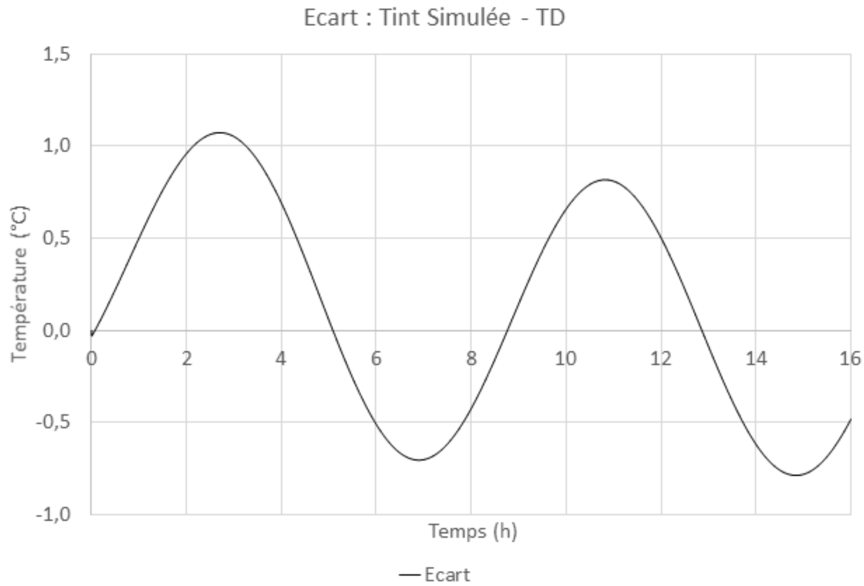


Ecart entre le modèle sans diffusion et simulation



Question 25: Que peut-on dire des écarts de température entre intérieur et extérieur des sphères ? Justifier ces observations

On remarque une très légère différence entre température intérieure et extérieure.
Compte tenu de la période de la température de la planète (plusieurs heures) et de la grande diffusion des matériaux métalliques, à tout moment, la matière à « largement » le temps d'avoir une température homogène.
On remarque d'ailleurs bien l'inversion entre les deux courbes, l'intérieur étant toujours en retard par rapport à l'extérieur du fait de la diffusion.



Question 26: Que peut-on dire de l'écart entre température du modèle négligeant la diffusion et de la solution numérique simulée avec Python

On peut remarquer que la température obtenue en négligeant la diffusion est très proche de la température simulée obtenue avec Python. L'écart en régime établie oscille entre -1 et +1°C.

Question 27: Conclure quant à l'hypothèse initiale consistant à négliger la diffusion

Cette hypothèse était très bonne dans les conditions étudiées.

Question 28: Dans quelles conditions cette hypothèse pourrait être remise en cause ?

Tout est dans le rapport Diffusivité/période de la température
Si on change de matériau, par exemple des polymères à faible conductivité, sans changer la période de la température de la planète, on observera des différences de température importante entre extérieur et intérieur, ce qui va fortement changer les résultats.
Si on garde le matériau, mais que la période de la planète diminue, on ne laissera plus le temps à la température de s'uniformiser dans la matière.